Série n°1

– Espace mètrique –

Exercice 1

Soient les fonctions du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par:

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2| \quad N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

si x a pour coordonnées $(x_1; x_2)$.

1°) Vérifier que $d_i(x, y) = N_i(x - y)$ est une distance de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$ ou ∞.

2°) Dessiner la boule centrée en l'origine et de rayon 1 pour chacune de ces distances.

3°) Montrer que ces distances sont équivalentes (on pourra montrer que.

$$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 2N_\infty(x), \quad \text{et} \quad N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{2}N_\infty(x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$)

Exercice 2

Si E est un espace métrique, alors quels que soient x, y et a dans E, Montrer que

$$|d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y)$$

Exercice 3

Soit $d_1, d_2, ..., d_n : E \times E \to [0, \infty[$ des semi-distances sur E.

1°) Montrer que $d = \sum_{i=1}^n d_i$ et $d^{'} = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ sont des semi-distances.

2°) Soit $d : E \times E \to [0, \infty[$ une semi-distance sur E et $\alpha : E^{'} \to E$ quelconque. Montrer que $d^{'}$ définie par $d^{'}(x^{'}, y^{'}) = d(\alpha(x^{'}), \alpha(y^{'}))$ est une semi-distance sur $E^{'}$.

Exercice 4

Soit $X =]0, +\infty[$ pour $x, y \in X$, on note

$$d(x, y) = \mid \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid$$

1°) Montrer que d est une distance sur X.

2°) L'espace métrique (X, d) est-il complet?

Exercice 5

Montrer que:

1°) On a $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$

2°) $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$

3°) $x \in \overline{A}, \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \mathcal{O}$

4°) A ouvert $\Leftrightarrow A = A^\circ$

5°) A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

6°) A ouvert $\Leftrightarrow A$ est une union de boules ouvertes.

Exercice supplémentaire

Soient $(E; d)$ un espace métrique, A un sous-ensemble non vide de E et x un élément de E.Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $x \in \overline{A}$

b) $d(x, A) = 0$

c) il existe une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x